10-01-17

Previously on Beligiannis

Έστω η γραμμική ισοτιμία $\alpha x \equiv b \pmod{n}$ (*)

1) Η (*) έχει λύση $\Leftrightarrow \delta = (\alpha, n) | b$

2) Αν $\delta | b$, τότε η (*) έχει δ το πλήθος ανά δύο ανισότιμες λύσεις mod n.

Αν x_0 είναι μία λύση της (*) τότε όλες οι λύσεις είναι $x_0, x_0 + \frac{n}{\delta}, x_0 + \frac{2n}{\delta}, \ldots, x_0 + (\delta - 1)\frac{n}{\delta}$

3) $\alpha x \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta} x \equiv \frac{b}{\delta} \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{\delta}\right)$

Υποθέτουμε $\delta | b$

Αρκεί να βρω μια λύση της $\frac{\alpha}{\delta} x \equiv \frac{b}{\delta} \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{\delta}\right)$

Στην (**) $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right) = 1 \Rightarrow$ Η (**) έχει μοναδική λύση και βρίσκεται ως εξής

$\exists \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}: \frac{\alpha}{\delta}\kappa + \frac{n}{\delta}\lambda = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\delta}\kappa\frac{b}{\delta} + \frac{n}{\delta}\lambda\frac{b}{\delta} = \frac{b}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta}\kappa\frac{b}{\delta} \equiv \frac{b}{\delta} \left(\mathrm{mod}\, \frac{n}{\delta}\right)$

Άρα, $x_0 = \frac{\kappa b}{\delta}$ μοναδική λύση της (**) και x_0 λύση της (*)

Παράδειγμα: $980x \equiv 1500 \pmod{1600}$ $\circledast$

Έστω $\delta = (980, 1600) = 2^2 \cdot 5 = 20 \mid 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 = 1500$

$980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$
$1600 = 2^6 \cdot 5^2$
$1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

Άρα η $\circledast$ έχει 20 ανά δύο ισότιμες λύσεις mod 1600

Για την εύρεση της λύσης x_0:

$$\circledast \Rightarrow \frac{980}{20}x \equiv \frac{1500}{20} \left(\bmod \frac{1600}{20}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49x \equiv 75 \pmod{80} \quad \circledast\circledast$$

Η $\circledast\circledast$ έχει μοναδική λύση

$$80 = 49 + 31 \Rightarrow \ldots \; 1 = 49(-31) + 19 \cdot 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 75 = 49(-31)75 + 19 \cdot 80 \cdot 75 \Rightarrow 49(-31)75 \equiv 75 \pmod{80}$$

Τότε $x_0 \equiv 49 \pmod{80}$ μοναδική λύση της $\circledast\circledast$

$$49,\; 49 + \frac{1600}{20},\; 49 + 2 \cdot \frac{1600}{20},\; \ldots,\; 49 + 19 \cdot \frac{1600}{20}$$

Όλες οι λύσεις της αρχικής

Συστήματα Γραμμικών Ισοτιμιών

Σύστημα γραμμικών ισοτιμιών είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ισοτιμιών της μορφής

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x \equiv b_1 (\bmod m_1) \\ a_2 x \equiv b_2 (\bmod m_2) \\ \vdots \\ a_r x \equiv b_r (\bmod m_r) \end{array}\right\} (\Sigma)$$

Λύση του (Σ) είναι κάθε ακέραιος που ικανοποιεί όλες τις γραμμικές ισοτιμίες

Δηλαδή $x \in \mathbb{Z}$ και $a_i x_0 \equiv b_i (\bmod m_i)$, $1 \leq i \leq r$

Ορισμός: Δύο συστήματα γραμμικών συστημάτων με το ίδιο πλήθος καλούνται ισοδύναμα αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων

• Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων

Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \\ \vdots \\ x \equiv a_r (\bmod m_r) \end{array}\right\} (\Sigma)$$

έτσι ώστε $(m_i, m_j) = 1$ $\forall i, j$, $1 \leq i \neq j \leq r$

Τότε το (Σ) έχει λύση η οποία είναι μοναδική $\bmod (m_1 m_2 \cdots m_r)$